42. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

    (a)
    $$a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ beliebig} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right),$$
    mit $c \in \mathbb{R}^+$

    (b)
    $$b_0 = 0 \qquad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}.$$

43. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen sie gegebenenfalls-den Grenzwert:
    $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$
    Hinweis: Verwenden Sie die abelsche Summation aus Aufgabe 22.

44. (a) Zeigen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und der Beschränktheit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ folgt.

    (b) Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

45. Gegeben sei die Familie $(a_i)_{i\in I}$ mit $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und
    $$a_{(m,n)} := \frac{m+n+3}{(m+n+1)(m+n+2)} \left(\frac{3}{4}\right)^{m+n}.$$

    (a) Zeigen Sie, dass die Familie $(a_i)_{i\in I}$ summierbar ist.

    (b) Berechnen Sie
    $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+n+3}{(m+n+1)(m+n+2)} \left(\frac{3}{4}\right)^{m+n}.$$
    Hinweis: Eine Summation entlang der Diagonalen bietet sich an. Eine Partialbruchzerlegung kann dann auch hilfreich sein.

46. Untersuchen Sie die folgenden Potenzreihen auf Konvergenz

    (a)
    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(3 + (-1)^n)^n},$$

    (b)
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3^n}{n^2} z^n.$$

    Hinweis: Bestimmen Sie den Konvergenzkreisradius R (Skizze). Für das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzkreises setzen Sie $z = Rw$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $|w| = 1$.